Universidade de São Paulo em São Carlos   Lista 13, resolver até 15.6.2016

FCM0114 Eletromagnetismo

Nome:

1. **Distribuição de carga respirando**

Uma distribuição de carga radialmente simétrica varia no tempo como $\lambda(t)$ tendo a forma "respiratória",

$$\rho(\mathbf{r},t) = \rho_0 \lambda(t) \frac{1}{r^2} e^{-a\lambda(t)r} \ ,$$

onde $\rho_0 = const.$ e $a = const.$
a. Qual é o valor da carga total?
b. Calcule a densidade de corrente $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$, que corresponde a $\rho(\mathbf{r},t)$ à partir da equação de continuidade.
c. Determine $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ à partir do ansatz $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = E(r,t)\frac{\mathbf{r}}{r}$ (simetria radial).
d. Calcule a indução magnética $\mathbf{B}$ correspondente.
e. Mostre que a soluções para $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ satisfazem as equações de Maxwell.

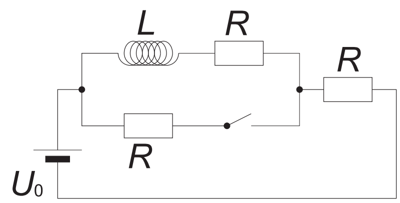
2. **Anel condutor no campo magnético oscilante**

Um laço condutor circular (indutividade L, resistência R) é atravessado por um fluxo magnético oscilante, $\Phi = \Phi_0 \cos \omega t$.
a. Calcule a amplitude da corrente no condutor, assim como a sua fase em relação a Φ.
b. Qual é a potência média dissipada no condutor? Discute também os casos limites $\omega \to 0$ e $\omega \to \infty$.
Ajuda: Constrói primeiramente um circuito equivalente incorporando uma fonte de tensão, uma resistência e um indutividade.

3. **Circuito indutivo**

Consideramos o circuito mostrado na figura, que consiste em uma bobina L, uma fonte de tensão $U_0 = 10$ V e três resistores ôhmicos $R = 100\ \Omega$. A bobina é um solenoide longo com 50 espiras por cm e uma indutância de 200 mH. Inicialmente, o interruptor é aberto por um longo tempo. Depois, no tempo $t = 0$, ele está fechado.
a. Qual é o valor inicial do campo magnético no solenoide, enquanto o interruptor ainda está aberto?
b. Usando as leis de Kirchhoff, derive a formula descrevendo a evolução temporal do campo

depois do interruptor ter sido fechado.
c. Determine o campo para longos tempos após o interruptor ter sido fechado.



4. **Onda no vácuo**

Uma onda eletromagnética transversal se propaga em um meio isótropo, não-condutante, sem cargas (vácuo) em direção z positiva. A projeção do vetor do campo elétrico sobre o plano x-y tem a forma,

$$\mathbf{E} = (E_{0x}, E_{0y}, 0) \sin(kz - \omega t) \ .$$

a. Ilustre o movimento de vetor do campo elétrico por um esquema. Como a onda está polarizada?
b. Mostre a partir das equações de Maxwell, que o vetor da indução magnética pode ser escrito como,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\omega}(\mathbf{k} \times \mathbf{E})$$

com o vetor de onda $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{e}}_z$.
c. Calcule a o fluxo de energia da onda (vetor de Poynting) $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ como função da velocidade (de fase) da onda c_0.
Ajuda: Vale $\mathbf{a} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{a}) = \mathbf{B}\mathbf{a}^2 - \mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{B})$. Como muda a velocidade de fase em outros meios ($\mu_r \neq 1$ e $\epsilon_r \neq 1$)? O que isso significa para $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$.

5. **Equação de onda**

a. A partir das equações de Maxwell no vácuo sem cargas nem correntes ($\mathbf{j} = 0, \rho = 0$), derive as equações de onda para $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$.
b. Mostre, que ondas planas $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0\hat{\mathbf{e}}_z \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ resolvem a equação de onda, quando a relação de dispersão $\omega = ck$ é satisfeita.
c. Mostre, que ondas esféricas $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0}{r} e^{i(kr - \omega t)}$ resolvem a equação de onda, quando vale $\omega = ck$. O operador de Laplace em coordenadas esféricas é,

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\phi} \ .$$

O segundo termo só age sobre as partes que dependem dos ângulos. Verifique que $\Delta_{\theta,\phi}\mathbf{E} \equiv 0$.
d. Mostre que as equações de onda têm a forma,

$$\Delta\mathbf{E} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c_0^2}\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \ ,$$

quando a onda não se propaga no vácuo, mas num meio dielétrico neutro (isto é, sem cargas livres, mas $\rho = 0$). Supõe o caso simples, que o deslocamento dielétrico $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ tem a forma,

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \ .$$

Qual é a forma das equações de onda neste caso? Como se muda a velocidade de fase c da onda? Você pode identificar o significativo da grandeza $n \equiv \sqrt{1 + \chi}$?